Hi	Klasse 10	Potenzen – Potenzen mit rationalem Exponenten Datum:	Mathematik

Merke:

MERKWISSEN

Die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt[n]{a}$, die **n-te Wurzel** aus a. Mit anderen Worten:
$\sqrt[n]{a}$ ist diejenige nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz gleich a ist.

Das Potenzieren (einer nichtnegativen Zahl) mit n und das Ziehen der n-ten Wurzel heben sich auf. Somit ist folgende Festlegung sinnvoll: $\mathbf{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$.

Steht die m-te Potenz ($m \in \mathbb{Z}$) von $a \in \mathbb{R}_0^+$ unter der n-ten Wurzel ($n \in \mathbb{N}$), so gilt: $\mathbf{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$.

Für das Umschreiben von Potenzen mit rationalen Exponenten in Wurzeln gelten die folgenden Gesetze:

- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Für das Rechnen bei gleicher **Basis** gelten die folgenden Potenzgesetze:

- $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{o}{p}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{o}{p}}$
- $\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{o}{p}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{o}{p}}$

Für das Rechnen bei gleichem **Exponent** gelten die folgenden Potenzgesetze:

- $a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{m}{n}}$
- $\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$

Für das Potenzieren von Potenzen mit rationalen Exponenten gilt folgendes Potenzgesetz:

- $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{o}{p}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{o}{p}}$

Wurzelgesetze

Für alle reellen Zahlen a, b mit $a \geq 0$; $b > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

1 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ 2 $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$ 3 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Für $a \geq 0$; $n \in \mathbb{N}$; $m \in \mathbb{Z}$ gilt: 4 $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$

Ein möglicher Beweis für das Wurzelgesetz 1 :
Bezeichne $x = \sqrt[n]{a}$ und $y = \sqrt[n]{b}$. Sei also x diejenige nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz gleich a ist, und y diejenige nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz gleich b ist. Dann gilt:
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = x \cdot y = \sqrt[n]{(x \cdot y)^n} = \sqrt[n]{x^n \cdot y^n} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

Hi	Klasse 10	Potenzen – Potenzen mit rationalem Exponenten Datum:	Mathematik

Aufgabe

Berechne die folgenden Terme.

a) $9^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{3}}$

b) $5^{-\frac{6}{6}} \cdot 16^{\frac{1}{2}}$

c) $27^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-2} \cdot 9^{\frac{1}{2}}$

d) $25^{-\frac{4}{8}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{\frac{1}{3}}$

e) $9^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}$

f) $25^{-\frac{2}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

g) $8^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{\frac{1}{3}}$

h) $\frac{27^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{32}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$

i) $100^{\frac{2}{8}} \cdot 100^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{3}}$

j) $\frac{81^{\frac{3}{4}}}{81^{\frac{1}{4}}} \cdot 27^{-\frac{1}{3}}$

k) $\left(2^{\frac{10}{2}}\right)^{\frac{20}{50}} \cdot 5^{\frac{10}{5}} \cdot 100^{-\frac{1}{2}}$

l) $\frac{25^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot 256^{\frac{1}{4}}$

m) $125^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{64^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}} \cdot 4^{\frac{2}{3}}$

n) $\frac{72^{\frac{1}{3}}}{9^{\frac{1}{3}}} \cdot \left(4^{\frac{2}{6}}\right)^{\frac{6}{3}} \cdot 25^{\frac{120}{240}} \cdot 10^{-\frac{1}{2}}$

Aufgabe 2

Vereinfache soweit wie möglich. **Schreibe** dein Ergebnis als Potenz.

a) $\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$

b) $-3\sqrt[5]{4} + 7\sqrt[5]{4} - 2\sqrt[5]{4}$

c) $4\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{6}$

d) $15\sqrt{3} - \sqrt[3]{3} + 5\sqrt{3}$

e) $5\sqrt{17} + 28\sqrt{2} - 7\sqrt{17} + 3\sqrt{2}$

f) $4\sqrt{5} - 5\sqrt[3]{2} - 2\sqrt{5} + 6\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{2}$